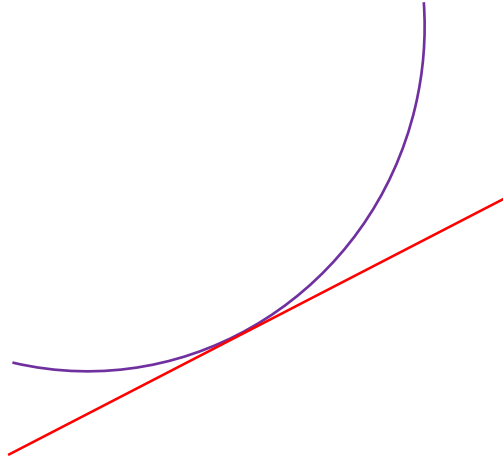


# מתמטיקה ב'



גיא סלומון

### סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר <http://www.gool.co.il>

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינוך בעמוד הקורס: [תדוא 1](#)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



## תוכן עניינים

- פרק 1 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי).....6
- פרק 2 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים).....7
- פרק 3 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים).....8
- פרק 4 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה).....9
- פרק 5 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות).....10
- פרק 6 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות).....11
- אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד).....11
- אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית).....12
- אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית).....13
- פרק 7 - האינטגרל המסויים.....14
- פרק 8 - שימושי אינטגרל המסויים (שטח ואורך קשת).....17
- חישוב שטחים.....17
- פרק 9 - שימושי אינטגרל המסויים.....30
- נפח של גוף סיבוב.....30
- פרק 10 - גזירת האינטגרל.....33
- פרק 11 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים).....34
- פרק 12 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות.....35
- פתרונות.....37
- פרק 13 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות.....38
- פתרונות.....41
- פרק 14 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים.....43
- פתרונות.....44
- פרק 15 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט.....45
- פתרונות.....46
- פרק 16 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים.....48
- פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות.....48
- שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח).....49

50	פתרונות
51	פרק 17 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)
52	פתרונות
53	פרק 18 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)
53	שיטת מינימום הריבועים הפחותים
53	שיטת הריבועים הפחותים
54	פתרונות
55	פרק 19 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
55	פונקציות של שני משתנים
57	פתרונות
58	פרק 20 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')
58	פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ
58	פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים
60	פתרונות

## פרק 1 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) \qquad \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

$$\int 2\sin 4x + \cos x dx \quad (36) \qquad \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) \qquad \int \cos 4x dx \quad (34)$$

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

## פרק 2 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1)x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1)x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

\* הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

### פרק 3 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int x \cos 2x dx \quad (4) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x \quad (10) \quad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16) \quad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \quad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$  כאשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int x^4 e^x dx$ .

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \cos^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int \cos^4 x dx$ .

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int \cos^4 x dx$ .

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  כאשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!



## פרק 4 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3(3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

**הערה:** בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

## פרק 5 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3) \quad \int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2) \quad \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (5) \quad \int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (4) \quad \int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (8) \quad \int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (7) \quad \int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (11) \quad \int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (10) \quad \int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (14) \quad \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (13) \quad \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (16) \quad \int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (20) \quad \int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (19) \quad \int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (23) \quad \int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (22) \quad \int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (21)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5) \quad \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

**פרק 6 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות**

**טריגונומטריות)**

**אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3) \quad \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2) \quad \int (\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3}) dx \quad (1)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6) \quad \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5) \quad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9) \quad \int \tan^2 x dx \quad (8) \quad \int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12) \quad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11) \quad \int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15) \quad \int \sin^2 4x dx \quad (14) \quad \int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad (18) \quad \int \cos^4 x dx \quad (17) \quad \int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21) \quad \int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20) \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24) \quad \int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23) \quad \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

**אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**

זכור:

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t) (-dt)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \cos^3 x dx \quad (3) \quad \int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2) \quad \int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6) \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5) \quad \int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9) \quad \int \tan^5 x dx \quad (8) \quad \int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12) \quad \int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11) \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

זכור:

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

**אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**

$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right  = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$
$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right  = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$
$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right  = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

## פרק 7 - האינטגרל המסויים

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3) \quad \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2) \quad \int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6) \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 1} dx \quad (5) \quad \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (2) \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

(3) נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכח:

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^3 + x^5} dx \quad (1)$$

(5) הוכח את אי השוויונים הבאים:

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3) \quad 6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2) \quad \frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6) \quad 0.9 \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq 1 \quad (5) \quad \frac{1}{2} e^{-10} < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 1 \quad (4)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9) \quad -\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8) \quad \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

(7) חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן):

$$\int_0^1 x dx \quad (1) \quad \int_0^1 x^2 dx \quad (2) \quad \int_0^1 x^3 dx \quad (3) \quad \int_0^\pi \sin x dx \quad (1)$$

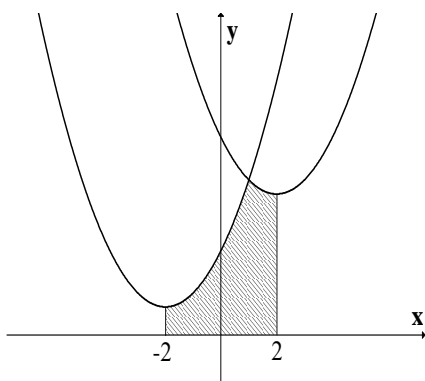
\* תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$



## פרק 8 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

### חישוב שטחים



(1) נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

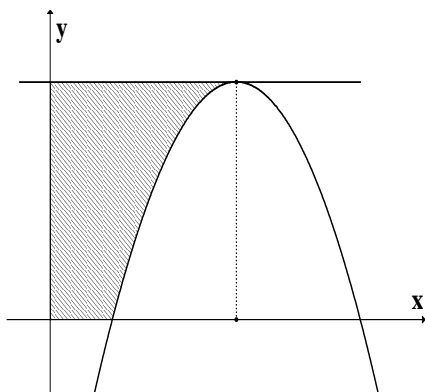
א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים

$$x = 2 \text{ ו- } x = -2 \text{ (השטח המקווקו בציר).}$$

(2) נתונה הפונקציה  $y = -x^2 + 6x - 5$  (ראה ציור).



א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

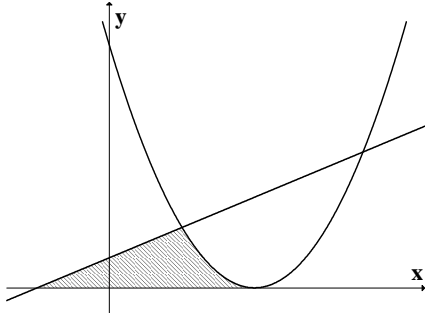
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$  ונתון הישר

$$y = 0.5x + 0.5 \quad (\text{ראה ציור}). \text{ מצא את השטח}$$

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$

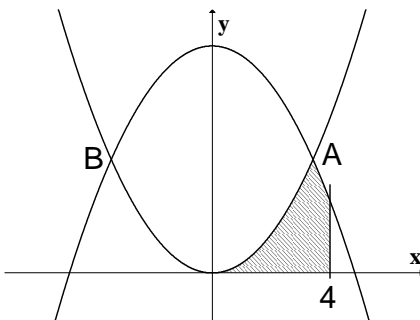
(השטח המקווקו בציור).

(4) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B



(ראה ציור).

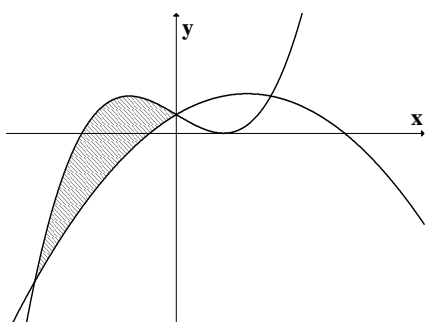
א. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה-  $x$   
ועל

ידי הישר  $x = 4$ .

(5) נתונות שתי פונקציות:



$$y = -x^2 + 3x + 2$$

$$y = x^3 - 3x + 2$$

א. מצא את שיעורי ה-  $x$  של נקודות החיתוך בין

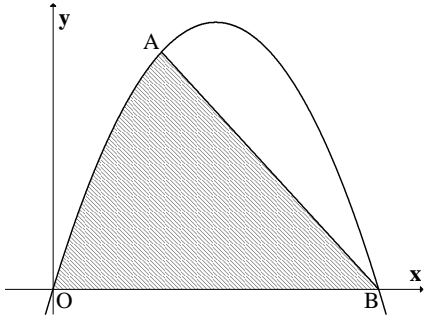
הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של  
שתי

הפונקציות, השטח המקוקו בציר.

(6) נתונה הפונקציה  $f(x) = -x^2 + ax$ .

הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $A(2,8)$  (ראה  
ציור).



א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

ב. הפונקציה חותכת את ציר  $x$  בנקודה  $O(0,0)$

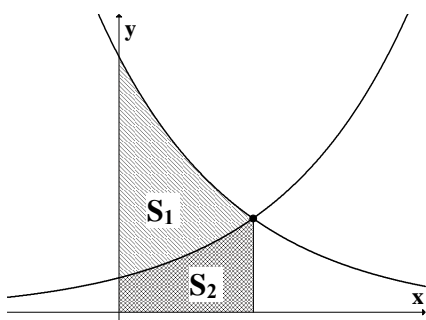
ובנקודה  $B$ . מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר  $AB$  ועל ידי ציר

ה-  $x$ .

(7) בציר שלפניך נתונות שתי הפונקציות :



$$f(x) = e^{-x+2}$$

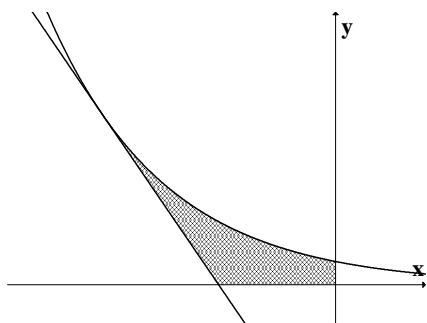
$$g(x) = e^x$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר  $y$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$  (ראה ציור).

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{-2x}$ .



העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

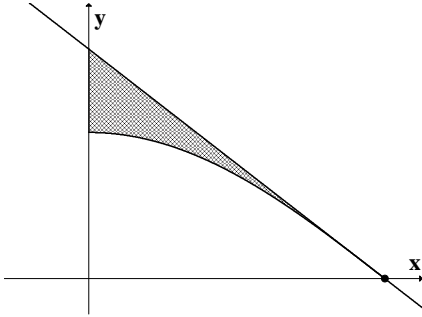
$$x = -1 \text{ (ראה ציור).}$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).



(9) נתונה הפונקציה  $y = \cos 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

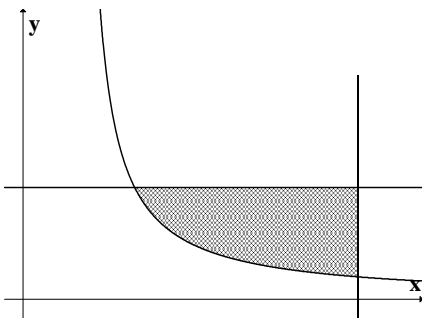
(ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$ .



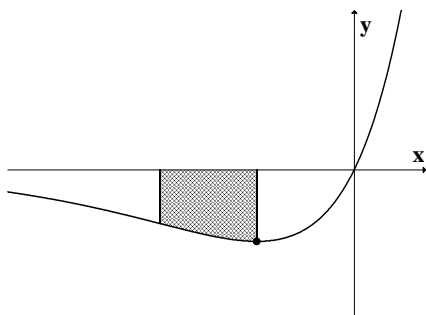
(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{2x-1} \quad \text{ועל ידי הישרים } x=3 \text{ ו- } y=1$$

(השטח המקווקו בציור).

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = e^{2x} - e^x.$$

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת המינימום של

הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך

לציר ה- $x$ . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי ציר ה- $x$ , על ידי האנך ועל

ידי הישר  $x=a$ , שווה ל- $3e^{2a} - e^a$ , כאשר

$a < \ln 0.5$ . מצא את הערך של  $a$ .

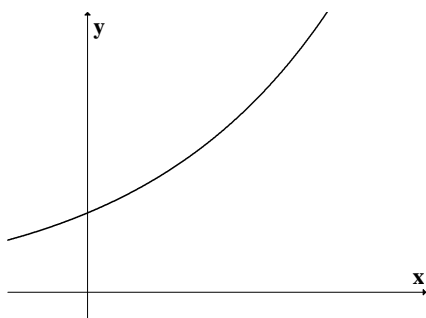
$$(12) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = e^{\frac{x+1}{2}} \text{ (ראה ציור).}$$

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $A$ ,

$$\frac{e^2}{2}.$$

הוא

א. מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .





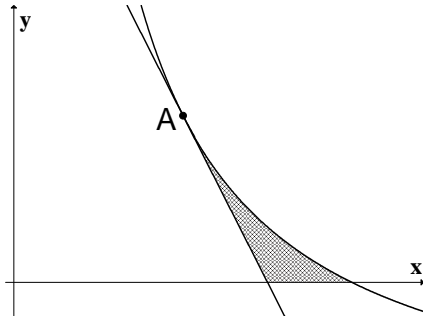
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$ .

(13)



נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x} - 2$  בתחום  $x > 0$ .

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2, 2)$  (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $x$  (השטח

המקווקו בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \sin x ; 0 \leq x \leq \pi$$

$$g(x) = \cos 2x ; 0 \leq x \leq \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקוו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15) נתונה הפונקציה  $f(x) = tg^2 x$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

ב. הראה כי  $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + c$  ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי

המשיק ועל ידי ציר ה- $x$ .

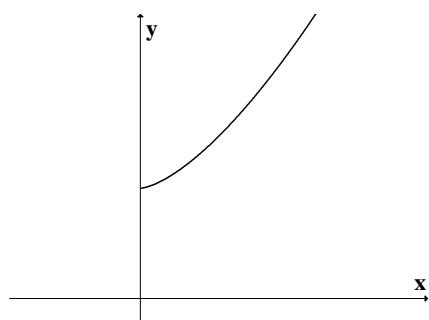
(16) דרך הנקודה  $A(8,0)$  העבירו משיקים לפרבולה  $y = x^2 - 10x + 25$ .

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

נתונה הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + 4$  בתחום  $x \geq 0$ .



(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה

(0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$ .

(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה  $f(x) = \cos^3 x$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי גרף הפונקציה  $y = \cos^2 x \cdot \sin x$

$$\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \quad \text{בתחום}$$

\* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $y = x - 8$ .

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א.  $\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2} dx$ . ב.  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$ .

חישוב אורך עקום (קשת)

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

$$(1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3) \quad (1 \leq x \leq 8) y = x^{2/3} \quad (2) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8) x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{1}{3} \sqrt{x}(3-x) \quad (5) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2) y = x^2 \quad (9) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \ln x \quad (8) \quad (0 \leq y \leq 4) x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

## פרק 9 - שימושי אינטגרל המסוים

(חישוב נפח גוף סיבוב, שטח מעטפת של גוף סיבוב ונפח של גוף)

### נפח של גוף סיבוב

(1) רשום את הנוסחאות לחישוב נפח גוף סיבוב, סביב ציר  $x$  וסביב ציר  $y$ , בשיטת הדיסקות

(cavalieri) ובשיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = x^2$  ו-  $y = 2x$  מסתובב סביב ציר  $x$ .

חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

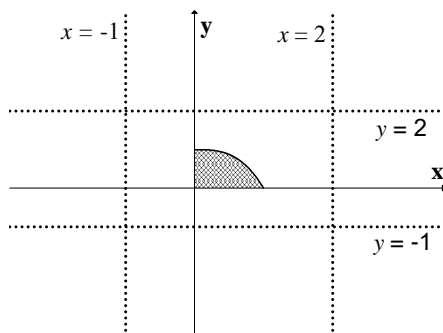
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(3) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = x^2$  ו-  $y = 2x$  מסתובב סביב ציר  $y$ .

חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

ב. שיטת הקליפות הגליליות.



(4) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - x^3$

והצירים מסתובב סביב:

א. ציר  $x$ . ב. הישר  $y = -1$ . ג. הישר  $y = 2$ .

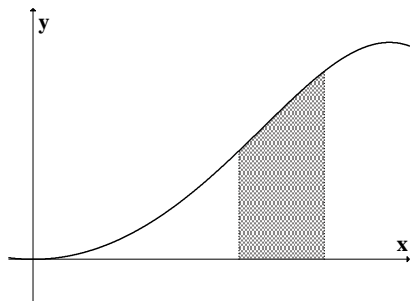
ד. ציר  $y$ . ה. הישר  $x = -1$ . ו. הישר  $x = 2$ .

מהו נפח הגוף המתקבל ?

(5) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(6) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

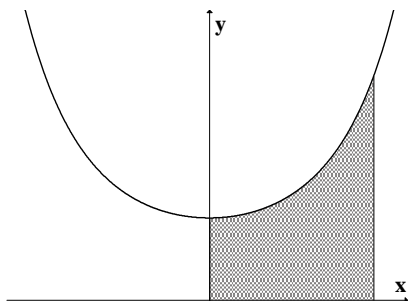
(7) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(8) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \sin(x^2)$

והישרים:  $y = 0$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$  מסתובב

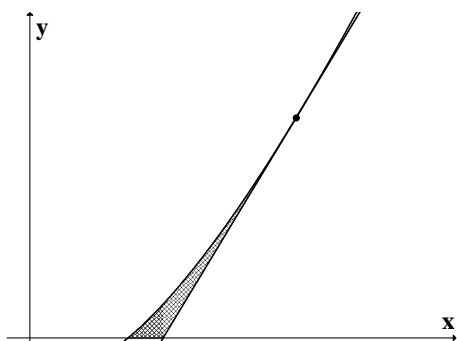
סביב ציר  $y$ . מהו נפח הגוף המתקבל.



(8) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = e^{-x^2}$

והישרים:  $y = 0$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$  מסתובב

סביב ציר  $y$ . מהו נפח הגוף המתקבל.



(9) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = x \ln x$ ,

המשיק לגרף בנקודה  $(e, e)$  וציר  $x$  מסתובב סביב

ציר  $x$ . מהו נפח הגוף המתקבל?

שטח מעטפת של גוף סיבוב

(10) רשום את הנוסחאות לחישוב שטח מעטפת של גוף סיבוב

(11) הפונקציה  $y = \sqrt{4 - x^2}$  עבור  $-1 \leq x \leq 1$  מסתובבת סביב ציר  $x$ .

מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

(12) נסח והוכח את הנוסחא לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

(13) נסח והוכח את הנוסחא לחישוב שטח מעטפת של כדור.

(14) הפונקציה  $x = \sqrt{9 - y^2}$ , עבור  $-2 \leq y \leq 2$  מסתובבת סביב ציר  $y$ .

מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

חישוב נפח

(15) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו  $a$ .

(16) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית שניצביו  $a$  ו- $b$  וגובהה  $c$ .



## פרק 10 - גזירת האינטגרל

(1) צטט את המשפט היסודי (השני) של החדור"א.

(2) על סמך המשפט היסודי הוכח כי אם  $f(x)$  רציפה ו-  $a(x), b(x)$  גזירות, אזי:

$$1) I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x)$$

$$2) I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (4) \quad I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (3) \quad I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (2) \quad I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (1)$$

$$(5) \text{ חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

## פרק 11 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (4) \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2} \quad (8) \quad \int_1^\infty x^2 e^{-2x} dx \quad (7) \quad \int_1^\infty \frac{x}{x^2+5} \quad (6) \quad \int_1^\infty x e^{-x^2} \quad (5)$$

(2) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

$$\int_3^\infty \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2-4}} dx \quad (4) \quad \int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5} dx \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5} dx \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8) \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7) \quad \int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (6) \quad \int_1^\infty (\sqrt{x^2+1}-x) dx \quad (5)$$

(3) חשב את השטח בין גרף הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x = 1$  וציר  $x$  עבור  $x \leq 1$ .

(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x = 5$ .

## פרק 12 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$


---

(2) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$


---

(3) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה  $(0,0)$ .

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה

רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

**פתרונות**

(1) (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר  $y$ . (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור. (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה. (5)  $y < x^2$

(6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון. (7) ת.ה. - כל המרחב. (8) ת.ה. - כל המרחב.

(2) (1) 1 (2)  $\frac{1}{2}$  (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6)  $\frac{1}{2}$  (7) 2 (8) 5.

(3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0

(8) 0.

(5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר  $f(0,0) = 1$  הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

### פרק 13 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) (1) חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה  $(0,0)$ .

(2) האם הפונקציה רציפה בנקודה  $(0,0)$ ?

(3) האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה  $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה  $(0,0)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הצרת סימון:

$$f = f(x, y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$



**פתרונות**

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(1) (3) הנגזרות החלקיות בנקודה (0,0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0,0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) (1) לא דיפרנציאבילית (2) דיפרנציאבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

(6) דיפרנציאבילית.

## פרק 14 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

\* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

$$(1) \text{ נתון } x = 2u - v, y = u^2 + v^3, z = \ln(x^2 - y^2) \text{ . חשב } z_u, z_v$$

$$(2) \text{ נתון } v = 4t + k^2, u = t^2 + 4m, z = e^{u-v} \text{ . חשב } \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial m}, \frac{\partial z}{\partial k}$$

$$(3) \text{ נתון } z = f(x^2 - y^2) \text{ . הוכח } y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$$

$$(4) \text{ נתון } z = f(xy) \text{ . הוכח } x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$$

$$(5) \text{ נתון } z = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ . הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$$

$$(6) \text{ נתון } z = f(x - y, y - x) \text{ . הוכח } z_x + z_y = 0$$

$$(7) \text{ נתון } w = f(x - y, y - z, z - x) \text{ . הוכח } w_x + w_y + w_z = 0$$

$$(8) \text{ נתון } u = \sin x + f(\sin y - \sin x) \text{ . הוכח } u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$$

$$(9) \text{ נתון } z = y \cdot f(x^2 - y^2) \text{ . הוכח } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

$$(10) \text{ נתון } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right) \text{ . הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

$$(11) \text{ נתון } u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \text{ . הוכח } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

$$(12) \text{ נתון } h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax) \text{ . הוכח } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

$$(13) \text{ נתון } u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$$

$$\text{ הוכח: א. } u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{ב. } u_{xy} = u_{yx}$$

$$\text{ חשב: ג. } u_{xy}(1, \pi) \text{ אם ידוע ש- } f'(0) = 2, g'(0) = 1$$

$$y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta, \quad u = f(x, y) \quad \text{נתון (14)}$$

$$\text{א. הוכח } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$\text{ב. הוכח } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$\text{ג. הוכח } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$\text{(15) נתון } z = h(u, v) \text{ ונתון כי } u = f(x, y), \quad v = g(x, y) \text{ מקיימות את מישוואת}$$

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \text{ קושי-רימן, כלומר מקיימות}$$

הוכח כי:

$$\text{א. } u, v \text{ מקיימות את מישוואת לפלס. כלומר } u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$\text{ב. } h_{xx} + h_{yy} = \left( (u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

$$y = r \sinh s, \quad x = r \cosh s, \quad u = f(x, y) \quad \text{נתון (16)}$$

$$\text{הוכח כי } (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

### פתרונות

$$\text{(13) ג. } -e$$

## פרק 15 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

\* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

$$(1) \text{ תהי } f(x, y) = x^2 + y^2$$

א. חשב את הגרדיאנט של  $f$  ואת אורכו בנקודה  $(3, 4)$ . מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של  $f$  העובר דרך  $(3, 4)$ .

$$(2) \text{ תהי } f(x, y) = 3x^2y$$

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$  בכיוון הוקטור  $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ .

$$(3) \text{ תהי } f(x, y) = x - \sin(xy)$$

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, \pi/2)$  בכיוון הוקטור  $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ .

$$(4) \text{ תהי } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$  בכיוון וקטור היחידה, היוצר

זווית של  $45^\circ$  עם החלק החיובי של ציר  $x$ .

$$(5) \text{ תהי } f(x, y) = xy^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 3)$  בכיוון לנקודה  $(4, 5)$ .

$$(6) \text{ תהי } f(x, y, z) = x^2y^2z$$

חשב את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(2, 1, 4)$  בכיוון הוקטור

$$\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$$

(7) אם הפוטנציאל החשמלי  $V$  בנקודה  $(x, y)$  נתון על ידי  $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , מצא

את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה  $(3, 4)$  בכיוון הנקודה  $(2, 6)$ .

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה  $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה  $(0,0)$  היא מקסימלית וחשב את ערכה.

$$(9) \text{ מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$$

בנקודה  $(1,2,-1)$  היא מקסימלית וחשב את ערכה.

$$(10) \text{ אם הטמפרטורה נתונה על ידי } f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2 \text{ ואתה נמצא}$$

$$\text{בנקודה } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) \text{ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך}$$

ללכת?

הערות סימון

$$\mathbf{i} = (1,0), \mathbf{j} = (0,1) : R^2 \text{ במישור}$$

$$\text{ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים: } \vec{u} = (x, y) \text{ או } \vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\text{למשל, } \vec{u} = (3,4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1) : R^3 \text{ במרחב}$$

$$\text{ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: } \vec{v} = (x, y, z) \text{ או } \vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\text{למשל, } \vec{u} = (3,4,5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\cdot\mathbf{i} + 4\cdot\mathbf{j} + 5\cdot\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b.} \text{ יש המסמנים וקטור } \vec{u} \text{ גם כך } \underline{u} \text{ או כך } \mathbf{u}.$$

$$\mathbf{g.} \text{ וקטור יחידה יסומן } \hat{\mathbf{u}}.$$

### פתרונות

$$(1) \text{ א. הגרדיאנט } (6,8) \text{ . אורך הגרדיאנט } 10.$$

$$(2) \frac{48}{5} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) 7.5\sqrt{2} \quad (5) 3\sqrt{13} \quad (6) \frac{88}{3}$$

$$(7) \frac{1}{5}\sqrt{5} \quad (8) \text{ הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור } (1,1) \text{ ושווה ל- } \sqrt{2}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור  $(12, 14, -12)$  ושווה ל- 22 .

(10) בכיוון הוקטור  $(-2, 2, -2)$  .

**פרק 16 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים**

**גיאומטריים**

**פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות**

(1) מצא את  $y'$  כאשר  $x^2 + y^5 = xy + 1$ . חשב את  $y'(0)$ .

(2) מצא את  $y'(1)$  כאשר  $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$ .

(3) מצא את  $y'(e)$ ,  $y''(e)$  כאשר  $2\ln x + \ln y = 1$ .

(4) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$ .

חשב את:  $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ .

(5) נתון  $(y = y(x, z) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$ .

חשב את  $y_x(0,0)$ ,  $y_z(0,0)$ .

(6) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^3 - 2xz + y = 0$ . מצא  $z_{xx}(1,1)$ .

(7) נתונה משוואה  $z^3 - 3xyz = 4$  ונקודה  $(2,1,-2)$ .

מצא: (1)  $z_{xx}(2,1)$  (2)  $z_{xy}(2,1)$  (3)  $z_{yy}(2,1)$ .

(8) אם  $u^2 - v = 3x + y$  ו-  $u - 2v^2 = x - 2y$ .

מצא את  $u_x, v_x, u_y, v_y$ .

(9) אם  $w = u^3 + v^3$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $x = u + v$ , מצא את  $w_x, w_y$ .



**שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)**

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \text{ (} z < 0 \text{)}.$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה  $P$  בה  $x = -2, y = 1$ .

$$(11) \text{ מצא משוואה של מישור משיק למשטח } xyz = 8 \text{ בנקודה } (-2, 2, -2) \text{ וכן}$$

משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור}$$

$$x + 8y + 18z = 0$$

$$(13) \text{ למשטח } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \text{ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.}$$

מישור זה חותך את הצירים  $x, y, z$  בנקודות  $A, B, C$  בהתאמה. נסמן

$$O = (0, 0, 0) \text{ . הוכח } OA + OB + OC = a$$

( למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה ).

**פתרונות**

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

## פרק 17 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

$$(10) \text{ מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן } 32 \text{ סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח}$$

הפנים שלה הוא מינימלי.

$$(11) \text{ מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה } (1, 2, 3) \text{ למישור } -2x - 2y + z = 0$$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

$$(12) \text{ יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.}$$

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק עומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ ואת הביקוש  $Q_2$

למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוניים,  $P_1$  ו- $P_2$ , על מנת למקסם

את הרווח? מהו רווח זה?

### פתרונות

(1)  $(-0.5, 1)$  אוסף;  $(1.5, -3)$  מינימום.

(2)  $(1, 2)$  מינימום;  $(-1, -2)$  מקסימום;  $(-1, 2)$ ,  $(1, -2)$  אוסף.

(3)  $(0, 0)$  אוסף;  $(1, 1)$  מינימום.

(4)  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  מינימום;  $(1, 0)$  מקסימום;  $(-1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  אוסף.

(5)  $(0, 2)$  מקסימום. (6)  $(4, 4)$  מקסימום.

(7)  $(-0.5, 4)$  מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.

(9)  $z = 3$ ,  $z = 4$ . (10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

(11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$ .

(12)  $P_1 = 10\$$ ,  $P_2 = 12\$$ , רווח מקסימלי  $288\$$ .

## פרק 18 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)

### שיטת מינימום הריבועים הפחותים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה } y = x^2 + 1 \text{ לפרבולה } y = -x^2 + 2x.$$

\* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

### שיטת הריבועים הפחותים

$$(7) \quad \text{נתונות } n \text{ נקודות: } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה  $y = h(x)$

כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי:

$$h(x) = ax + b, \text{ הדגם עבור הנק' } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5)$$

$$h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגם עבור הנק' } (-1, 2), (2, 0), (0, -2)$$

$$h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגם עבור הנק' } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4)$$

$$h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגם עבור הנק' } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

$h(x) = ax^2 + bx + c$ , הדגם עבור הנק'  $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$

(8) נתונות  $n$  נקודות:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

מצא ישר  $y = ax + b$  כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור  $a$  ו- $b$ .

הערה: בשאלות (7) ו-(8) ניתן להניח ש- $a$  ו- $b$  המתקבלים מפתרון המשוואות

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים  $f_a = 0, f_b = 0$

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

### פתרונות

(1) לכל  $t$  ממשי, מקסימום. (2)  $(0, 0)$  מקסימום.

(3) אין קיצון. (1, 2) אוקף. (4) אין קיצון. (1, 2) אוקף.

(5)  $(0.5, 1, 1)$  מינימום. (6) 0.375

(7.א.)  $y = 0.88x + 0.3$  (7.ב.)  $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

(7.ג.)  $y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$  (7.ד.)  $y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$

(7.ה.)  $y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (8)$$

## פרק 19 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

### פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12, \text{ מצא את זו שמכפלת}$$

שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \text{ מצא את הנקודות}$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0 \text{ לפרבולה}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0 \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(10) מוישלה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$  והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו  $X$  ואננס  $Y$  היא  $x^2 + y^2 = 13$ .

$$f(x, y) = 4x + 6y \quad \text{לדני תועלת}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם

$$P_K = 2, P_L = 1. \quad \text{היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את היצרוף}$$

$(K^*, L^*)$  המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).



פתרונות

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1) \\
 \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3) \\
 & \text{Max}(9, 36) & (6) & \text{Max}(6, 2) \quad (5) \\
 \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & (6, 2) \quad (7) \\
 & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & 7 / \sqrt{45} \quad (9) \\
 & \text{Max}(2, 3) & (12) & \text{Max}(6, 2) \quad (11) \\
 & & & \min\{2K + L\} \quad ; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)
 \end{array}$$

## פרק 20 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי

### לגרנג')

#### פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  את הנקודות הקרובות ביותר

לנקודה  $(1, 2, 2)$  ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה  $(1, 2, 2)$ .

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$ .

ב. מצא נק' על המישור  $-2x - 2y + z = 0$  שהיא הקרובה ביותר לנק'  $(1, 2, 3)$ .

ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח  $z^2 = xy + 1$  הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד  $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

למישור  $3x + 4y + 12z = 288$

רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0, z_0)$  מהמישור  $ax + by + cz + d = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

#### פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$

והמישור  $z = x + y$  לבין ראשית הצירים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{והמישור } z = x + y \quad \text{לבין ראשית הצירים.}$$

### הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

**פתרונות**

(1) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .

(2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה (2, 4, 4) .

הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה (-2, -4, -4) .

(3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך . נקודה קרובה ביותר  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$  .

(4)  $(0, 0, 1)$  ,  $(0, 0, -1)$  .

(5) מרחק קצר ביותר  $\frac{256}{13}$  . מרחק ארוך ביותר  $\frac{320}{13}$  .

(6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי  $\sqrt{3}$  .

(7) מרחק מינימלי  $\frac{75}{17}$  . מרחק מקסימלי 10 .